

Polinomi di più variabili

DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

Proposizione 1. Sia $P \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio di due variabili. Sia (a, b) un intervallo in \mathbb{R} e siano

$$x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

due funzioni derivabili su (a, b) . Allora, la funzione composta

$$P(x, y) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

è derivabile su (a, b) e per ogni $t \in (a, b)$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [P(x(t), y(t))] &= x'(t) \partial_x P(x(t), y(t)) + y'(t) \partial_y P(x(t), y(t)) \\ &= (x'(t), y'(t)) \cdot \nabla P(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Dimostrazione: Possiamo scrivere il polinomio P come

$$P(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j,$$

dove la sommatoria è finita ed i coefficienti a_{ij} sono numeri reali. In particolare, abbiamo

$$\begin{aligned} \partial_x P(x, y) &= \partial_x \left[\sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \right] = \sum_{i,j} \partial_x [a_{ij} x^i y^j] = \sum_{i,j} a_{ij} i x^{i-1} y^j, \\ \partial_y P(x, y) &= \partial_y \left[\sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \right] = \sum_{i,j} \partial_y [a_{ij} x^i y^j] = \sum_{i,j} a_{ij} j y^{j-1} x^i. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} x'(t) \partial_x P(x(t), y(t)) + y'(t) \partial_y P(x(t), y(t)) &= \sum_{i,j} a_{ij} \left(y(t)^j i x(t)^{i-1} x'(t) + x(t)^i j y(t)^{j-1} y'(t) \right) \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} \left(y(t)^j \partial_t [x(t)^i] + x(t)^i \partial_t [y(t)^j] \right) \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} \partial_t [x(t)^i y(t)^j] = \partial_t \left(\sum_{i,j} a_{ij} x(t)^i y(t)^j \right), \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

Corollario 2. Sia $P \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio di due variabili. Sia (a, b) un intervallo in \mathbb{R} e siano

$$x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

due funzioni derivabili due volte su (a, b) . Allora, la funzione composta

$$P(x, y) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

è derivabile due volte su (a, b) e per ogni $t \in (a, b)$ si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [P(x(t), y(t))] = (x'', y'') \cdot \nabla P(x, y) + (x', y') \begin{pmatrix} \partial_{xx} P(x, y) & \partial_{xy} P(x, y) \\ \partial_{yx} P(x, y) & \partial_{yy} P(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

dove per semplicità abbiamo ommesso la variabile t , ovvero nella formula di sopra

$$x' = x'(t), \quad y' = y'(t), \quad y'' = y''(t), \quad x'' = x''(t)$$

e dove il polinomio P e le sue derivate parziali sono calcolati nel punto $(x, y) = (x(t), y(t))$.